

CHAPITRE 8 : DYNAMIQUE DES SOLIDES EN TRANSLATION

Le skateboard a fait sa première apparition aux jeux olympiques de Tokyo en 2021 (JO de 2020 reportés). On distingue deux disciplines : le Park et le Street. Ce sport a de nouveau été au programme des JO de Paris

Lors de leurs performances, les skateurs démontrent qu'une force correctement appliquée peut permettre d'obtenir les figures les plus incroyables.

Comment décrire et expliquer l'origine du mouvement des skateurs ?



Rayssa Leal, médaille d'argent de Street au JO de Tokyo.

1 De la cinématique ...

1.1 Système, référentiel et repère

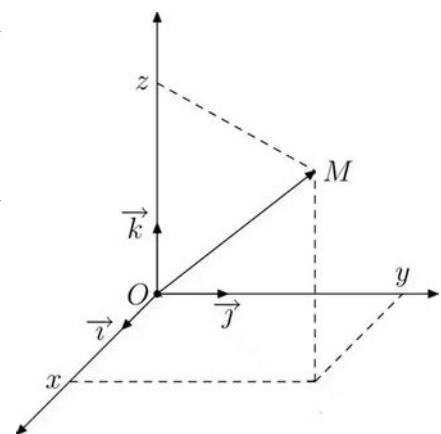
En mécanique l'objet étudié (ballon, javelot, {skateur+skateboard} ...) est appelé **système**.

En **mécanique du point** le système étudié est réduit à un point qui est généralement son **centre de gravité G**.

Pour décrire le mouvement du système il est nécessaire de définir un objet de référence (Terre, sol, kayak en mouvement, ...) appelé **référentiel**. En général le référentiel d'étude est le **référentiel terrestre** lié au sol terrestre.

Dans ce référentiel on choisit un **repère** défini par une origine O (lié au référentiel) et trois axes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En généralement ce repère est **orthonormé** c'est-à-dire que les 3 vecteurs de base sont de norme 1 et orthogonaux entre eux.

Repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \rightarrow$



1.2 Étude d'un point en mouvement

À un instant t , un point G en mouvement peut être repéré par son **vecteur position** dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dépendent du temps :

$$\vec{OG}(t) = x(t) \times \vec{i} + y(t) \times \vec{j} + z(t) \times \vec{k}$$

On peut aussi écrire :

$$\vec{OG}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Sa norme est égale à la distance OG(t) et vaut $OG(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$, elle s'exprime en m.

Remarque: $\vec{OG}(t)$ se lit « OG de t » et signifie que ses coordonnées x(t), y(t) et z(t) dépendent du temps car le point G est en mouvement.

À un instant t, le **vecteur vitesse** de G est égal à la **dérivée du vecteur position** par rapport au temps. Dériver le vecteur $\vec{OG}(t)$ par rapport au temps, c'est dériver chacune de ses coordonnées par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \frac{d \vec{OG}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

Sa norme est égale à la vitesse instantanée v(t) du point G à l'instant t et vaut $v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$, elle s'exprime en m.s⁻¹ (= m/s = mètre par seconde)

À un instant t, le **vecteur accélération** de G est égal à la **dérivée du vecteur vitesse** par rapport au temps :

$$\vec{a}(t) = \frac{d \vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

Sa norme est égale à l'accélération instantanée a(t) du point G à l'instant t et vaut $a(t) = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}$, elle s'exprime en m.s⁻² (= m/s² = mètre par seconde au carré)

$$x(t) = v_0 \times t + \frac{F_0}{m \times k^2} \times (e^{-k \times t} + k \times t - 1)$$

- Masse de Momiji Nishiya + son skateboard : $m = 47 \text{ kg}$
- Constante de temps de la poussée : $k = 10 \text{ s}^{-1}$
- Force de poussée maximale : $F_0 = 500 \text{ N}$
- Vitesse initiale (avant poussée) : $v_0 = 3,0 \text{ m.s}^{-1}$

1. Exprime la vitesse $v_x(t)$ du centre de gravité de la skateuse en fonction des données.
2. Calcule sa vitesse à l'issue de la poussée (temps t infini)
3. Exprime l'accélération $a_x(t)$ du centre de gravité de la skateuse.
4. Calcule l'accélération initiale $a_x(0)$ du centre de gravité de la skateuse.

$$\underbrace{\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{(t+\Delta t)-(t)}}_{\text{taux de variation}} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{} \underbrace{\frac{df(t)}{dt}}_{\text{dérivée}} = f'(t)$$

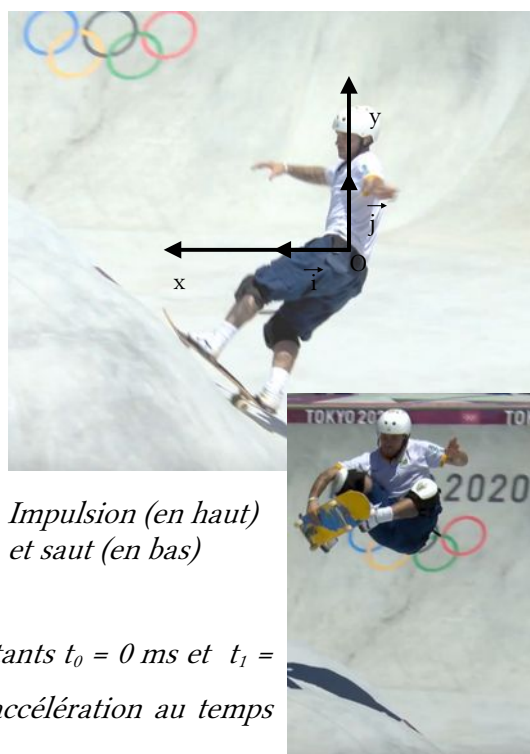
Dans certaines situations, on ne connaît les coordonnées, la vitesse ou l'accélération d'un système qu'à certains instants régulièrement espacés. Dans ce cas, si l'on souhaite effectuer une dérivation, on utilise la formule du **taux de variation** qui fournit une **valeur approchée de la dérivée**.

Exemple : admettons que l'on connaisse les coordonnées $y(t_1)$ et $y(t_2)$ d'un système aux instants t_1 et t_2 très proches. La vitesse approchée à l'instant t_1 vaut :

$$v_y(t_1) = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Application 2 : On étudie l'impulsion de Pedro Barros sur un « bump » lors des JO de Tokyo (il finira 2^e du park). L'instant $t=0$ correspond à l'image ci-contre. On étudie le mouvement de son centre de gravité G dans le référentiel terrestre muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre. Un pointage vidéo donne les coordonnées ci-dessous :

$t \text{ (ms)}$	$x \text{ (m)}$	$y \text{ (m)}$
0	0	0
40	0,20	0,14
80	0,39	0,29



Impulsion (en haut)
et saut (en bas)

1. Calcule les composantes v_x et v_y de la vitesse aux instants $t_0 = 0 \text{ ms}$ et $t_1 = 40 \text{ ms}$ puis déduis en les composantes a_x et a_y de l'accélération au temps $t = 0 \text{ ms}$. Recopie les résultats dans le tableau ci-dessous :

$t \text{ (ms)}$	$v_x \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$v_y \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$a_x \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$	$a_y \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$
0				
40			/	/

2. Trace le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ et le vecteur accélération $\vec{a}_0$ au temps $t=0$ sur l'image ci-dessus. Échelles : $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ m.s}^{-1}$ pour les vitesses $1 \text{ cm} \leftrightarrow 2 \text{ m.s}^{-2}$ pour les accélérations

3. Calcule la vitesse initiale v_0 à l'instant $t = 0 \text{ ms}$ de Pedro Barros.

2 ... à la dynamique

2.1 Les forces

Chaque action mécanique peut-être modélisée par un vecteur **force** $\vec{F}$ caractérisée par :

- son **point d'application** (centre de gravité, centre d'une surface, point de contact, ...)
- sa **direction** (horizontale, verticale, inclinée de 30° , ...)
- son **sens** (vers la droite, vers le bas, ...)
- sa **norme** exprimée en N. Sur feuille, si on respecte une échelle, la **longueur** du vecteur est **proportionnelle** à cette norme.

Une **force** peut :

- **modifier la trajectoire** d'un système (un gardien de but dévie le ballon avec sa main)
- **modifier la vitesse** d'un système (une athlète propulse son javelot)
- déformer un objet (l'impact d'une raquette déforme la balle de tennis)

Le cas du poids : Le **poids** est la force qui modélise l'action de la Terre sur tout objet situé à sa surface. Le vecteur $\vec{P}$:

- s'applique au **centre de gravité G** du système étudié.
- est **vertical** (direction) et **vers le bas** (sens).
- a pour norme $P = m \times g$ avec :
 - m la masse du système
 - $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$ l'intensité du champ de pesanteur sur Terre (aussi appelé accélération de la pesanteur car $1 \text{ N.kg}^{-1} = 1 \text{ m.s}^{-2}$)

Application 3 : On étudie une figure de Sky Brown skateuse britannique médaillée de bronze de Park aux JO de Tokyo. On suppose que la réaction du sol est verticale et de norme $R = 350 \text{ N}$.

Données :

- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ N/kg}$
- Masse de Sky Brown + skateboard : $m = 39,0 \text{ kg}$

1. Représente ci-contre les 2 forces exercées sur le système {athlète+skateboard}. En respectant l'échelle suivante : $100 \text{ N} \leftrightarrow 1 \text{ cm}$.



2.2 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Le **principe fondamental de la dynamique** s'énonce ainsi :

« Dans un référentiel galiléen, le centre de gravité G d'un système de masse m soumis à des forces extérieures de résultante $\Sigma \vec{F}$ subit une accélération $\vec{a}$ donnée par : $\Sigma \vec{F} = m \times \vec{a}$ »

Avec :

- $\Sigma \vec{F}$ le vecteur résultante des forces : c'est la somme vectorielle de toutes les forces extérieures appliquées au système (dont les composantes sont exprimées en N)
- m la masse du système (en kg)
- $\vec{a}$ le vecteur accélération (dont les composantes sont exprimées en m.s^{-2})

L'accélération du centre de gravité d'un système est donc de même direction et de même sens que la résultante des forces.

Il existe une version restreinte du principe fondamentale de la dynamique appelé principe d'inertie ou **principe fondamentale de la statique** :

« Dans un référentiel galiléen, le centre de gravité G d'un système de masse m soumis à des forces de résultante nulle ($\Sigma \vec{F} = \vec{0}$) est soit immobile soit en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{a} = \vec{0}$) »

Caractère galiléen du référentiel terrestre :

- Un **référentiel** est dit **galiléen** si le **principe fondamental de la statique y est vérifié**. Sur des durées de **quelques minutes**, le **référentiel terrestre** peut être considéré comme **galiléen**. Il est utilisé pour l'étude de la plupart des mouvements sur Terre (lancé de basket, saut en parachute, ...)

Quelques référentiels non galiléens :

- Un manège en rotation n'est pas un référentiel galiléen. Une balle posée sur ce dernier va être accélérée vers l'extérieur du manège ($\vec{a} \neq \vec{0}$) alors qu'elle est soumise à des forces qui se compensent ($\Sigma \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$).
- Sur des durées de quelques heures, le référentiel terrestre n'est plus galiléen. Un satellite géostationnaire est fixe dans le référentiel terrestre ($\vec{a} = \vec{0}$) alors qu'il est soumis à la seule force de gravitation de la Terre et que celle-ci n'est compensée par aucune autre force ($\Sigma \vec{F} = F_{\text{gravitation}} \vec{} \neq \vec{0}$)

Application 4 : Le skateur japonais Yuto Horigome médaillé d'or aux JO de Tokyo a effectué un « grind » sur l'arête d'un « scrub ». On admet que lors de cette figure le mouvement de son centre de gravité G était rectiligne uniforme. Il se pose sur le « scrub » horizontal au point O_1 avec une vitesse initiale horizontale de norme $v_{01} = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$.

Il a aussi effectué un « slide » sur un rail. Le skateur percute le rail en O_2 avec une vitesse parallèle au rail et de norme $v_{02} = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$. Ensuite il est soumis à :

- son poids P
- la réaction de la rampe perpendiculaire à celle-ci de norme $R = 467 \text{ N}$
- aux frottements du skateboard avec le rail de norme $f = 100 \text{ N}$.

Les études des 2 figures sont menées dans le référentiel terrestre.

Données :

- inclinaison du rail : $\alpha = 30^\circ$
- distance du centre de gravité de l'athlète – bas du skateboard : $h = 1,0 \text{ m}$
- intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$
- masse de l'athlète + skate : $m = 57 \text{ kg}$



Un grind sur un scrub horizontal



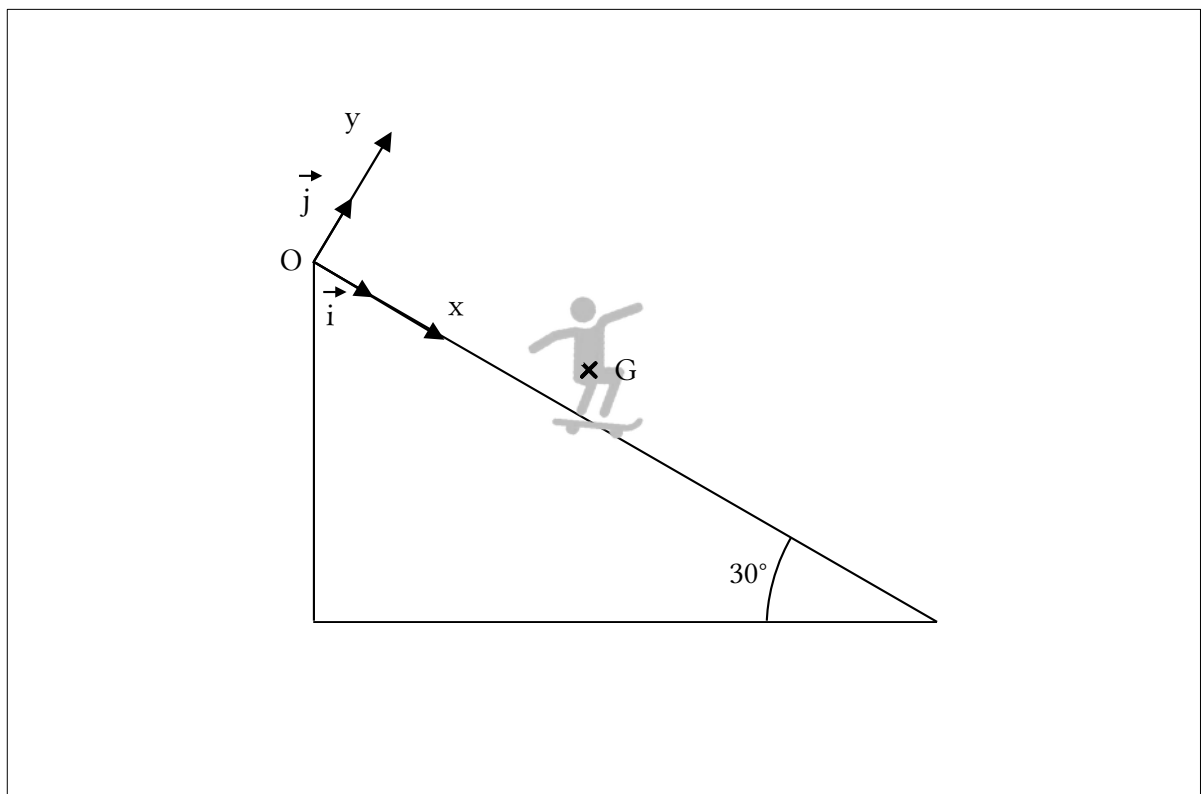
Un slide sur un rail incliné

Étude du « grind » :

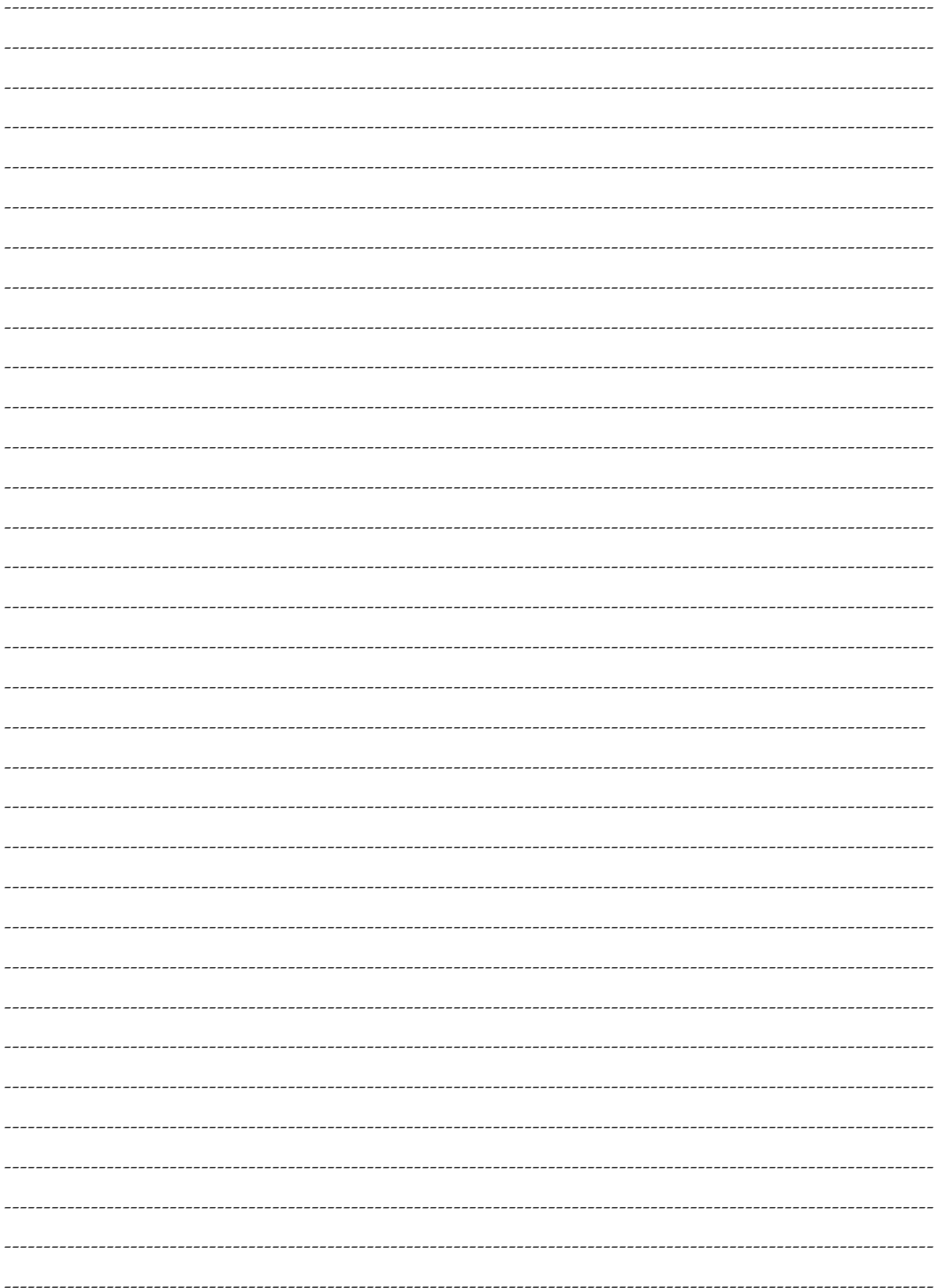
1. Justifie que le vecteur accélération $\vec{a}_1$ du centre de gravité de l'athlète est nulle.
2. Déduis en l'expression de son vecteur vitesse $\vec{v}_1$ et de son vecteur position $\vec{O}_1\vec{G}$ en fonction de v_{01} et t et h .

Étude du « slide » :

3. Complète le schéma ci-dessous en représentant les forces à l'échelle $1\text{ cm} \leftrightarrow 150\text{ N}$.



4. Trace le vecteur résultante des forces $\Sigma \vec{F}$ et déduis en la norme du vecteur accélération $\vec{a}_2$.
5. Retrouve cette valeur par le calcul.
6. Sachant que le slide a une durée de $\Delta t = 0,40\text{ s}$, calcule la vitesse de Yuto Horigome à la fin de son slide.



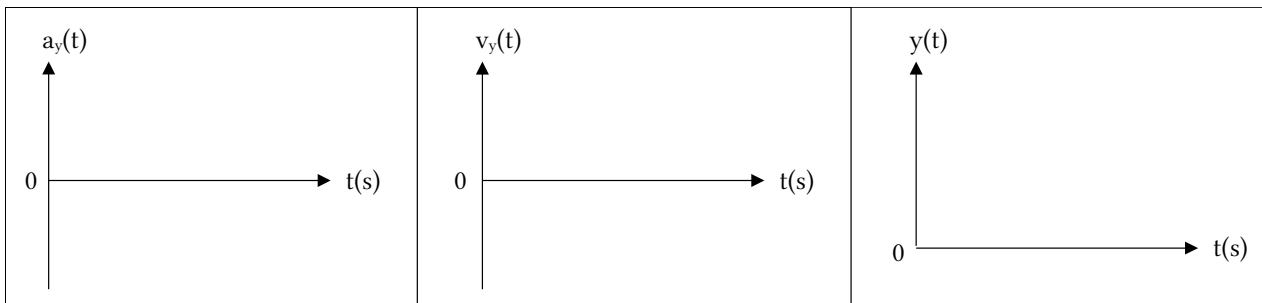
2.3 Modèle de la chute libre

Un système est en **chute libre** s'il n'est soumis qu'à **une seule et unique force** : son **poids** $\vec{P}$. Dans ce cas son accélération est égale à celle de la pesanteur : $\vec{a} = \vec{g}$

Application 5 : On étudie un saut quasiment vertical réalisé par Sakura Yozomi médaillée d'or de park aux JO de Tokyo. Sa vitesse lorsqu'elle quitte le bowl en O est verticale vers le haut de norme $v_0 = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$. Une fois en l'air l'athlète n'était plus soumise qu'à son propre poids.



1. Démontre, à l'aide du principe fondamentale de la dynamique, que l'accélération du centre de gravité G de l'athlète lors de son saut vaut $\vec{a} = \vec{g}$.
2. Déduis en l'expression de sa vitesse verticale $v_y(t)$ au cours du temps puis celle de sa position verticale $y(t)$ au cours du temps en fonction de g , t et v_0 .
3. Représente ci-dessous l'allure des courbes $a_y(t)$, $v_y(t)$ et $y(t)$.



3 Lien entre énergie et forces de frottement

3.1 Énergie d'un système et travail d'une force

L'**énergie cinétique** d'un système est donnée par la formule : $E_c = \frac{1}{2} \times m \times v^2$

Avec :

- m la masse du système (en kg)
- v sa vitesse (en m.s⁻¹)
- E_c son énergie cinétique (en J)

L'**énergie potentielle de pesanteur** d'un système est donnée par la formule : $E_p = m \times g \times z$

Avec :

- E_p l'énergie cinétique du système (en J)
- m la masse du système (en kg)
- g = 9,81 N.kg⁻¹ l'intensité de la pesanteur sur Terre
- z l'altitude du centre de gravité du système (en m)

Le **travail élémentaire d'une force** $\vec{F}$ de norme constante entre 2 points A et B infiniment proches est donné par la formule : $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos(\theta)$

Avec :

- F la norme de la force $\vec{F}$ (en N)
- AB la distance entre les points A et B (en m)
- θ l'angle entre les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{AB}$ (en °)

Pour de nombreuses **forces** dites « conservatives » comme le **poids**, ou dans le cas d'une **force constante** avec un **système en mouvement rectiligne** entre A et B : la formule précédente est valable entre des **points A et B quelconques** (pas forcément infiniment proches).

Cas du poids :

Le travail du poids entre 2 points d'altitude z_A et z_B vaut : $W_{AB}(\vec{P}) = -m \times g \times (z_B - z_A)$

Le membre de droite correspond à l'opposé de la variation d'énergie potentiel de pesanteur entre les points A et B : $W_{AB}(\vec{P}) = E_{p,A} - E_{p,B}$

3.2 Le théorème de l'énergie cinétique

« Dans un référentiel galiléen, la somme des travaux des forces appliquées à un système entre deux points A et B est égale à la variation d'énergie cinétique de ce système entre ces deux points »

$$\Sigma W_{AB}(\vec{F}) = E_{C,B} - E_{C,A}$$

(toutes les grandeurs sont en Joules J)

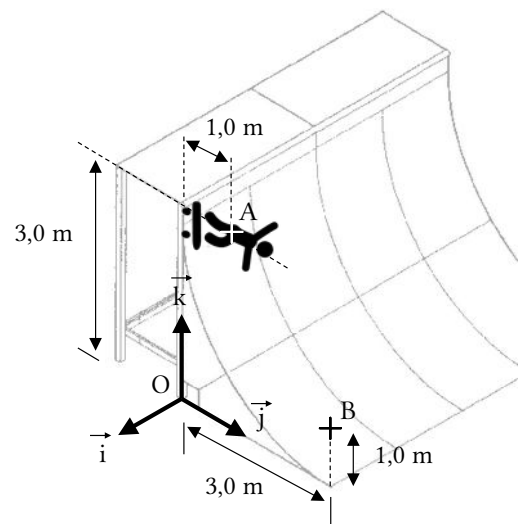
Application 6 : On étudie Keegan Palmer, médaillé d'or de Park au JO de Tokyo, s'élançant dans le « bowl ». On étudie le système {K.Palmer+skateboard} réduit à son centre de gravité G.



On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni du repère ci-contre. Le bowl des JO de Tokyo avait une profondeur de $h = 3,0 \text{ m}$. On admet que toute forme de frottement est négligeable.

Donnée : intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B ci-contre, établie l'expression mathématique de la vitesse v_B au point B du système en fonction de g et h puis calcule sa valeur.



3.3 Les frottements

Les forces de **frottements** qui s'exercent sur un système ont la **même direction** que son mouvement mais leur **sens** est **opposé au mouvement**. Leur travail est toujours négatif ce qui conduit à une diminution de l'énergie cinétique du système.

Les **frottements** peuvent être :

- **de type solide** lorsqu'il y a contact entre le système étudié et un solide. Sa valeur dépend de la **surface** de contact, de l'**état de surface** des 2 solides et de la **force d'appui**. Les frottements solides peuvent être de type statique (l'objet est immobile) ou dynamique (l'objet glisse).

Le lien entre la norme de la force de frottement f et force d'appui N (souvent égale au poids P) est donné par la loi de Coulomb :

$$f = \mu \times N \text{ avec } \mu \text{ le coefficient de frottement (sans unité)}$$

- **de type fluide** lorsqu'un gaz ou un liquide est en contact avec l'objet étudié. Elle dépend de la **nature du fluide**, de la **forme** du solide, de son **état de surface** et de sa **vitesse**.

Les frottements de type fluide sont fréquemment modélisés par une force de norme :

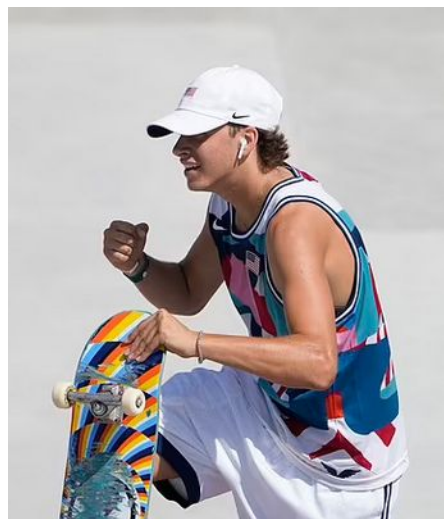
$$f = \frac{1}{2} \times \rho \times S \times C_x \times v^2$$

Avec :

- ρ la masse volumique du fluide dans lequel se déplace le système (en kg.m^{-3})
- S la surface frontale (vue de face) du système (en m^2)
- C_x le coefficient de traînée (sans unité)
- v la vitesse de translation du système (en m.s^{-1})

Application 7 : L'athlète américain Jagger Eaton (~50 kg) a fini son « ride » (grâce auquel il sera médaillé de bronze en Street à Tokyo) et souhaite s'arrêter. Pour cela il peut se placer sur une surface horizontale et utiliser les différentes forces de frottement :

- Les frottements f_F dus à l'interaction de l'air sur l'athlète. Ils sont modélisés par des frottements de type fluide avec $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$, $S = 0,34 \text{ m}^2$, $C_x = 0,5$ et $v = 5 \text{ m.s}^{-1}$.



- Les frottements f_R de résistance au roulement dus à l'écrasement des roues sur le sol et aux frictions dans les roulements à billes. Ils sont modélisés par des frottements de type solide avec $\mu_R = 0,02$.
 - Les frottements f_G lors d'un powerslide (glissement des roues sur le béton). Ils sont modélisés par des frottements de type solide avec $\mu_G = 0,7$.
1. Les meilleurs skateurs optent pour des roues de skateboard dures. En revanche, pour des déplacements du quotidien on peut opter pour des roues plus souples. Quel serait l'effet sur les forces de frottement f_B , f_R et f_G ?
 2. Calcule la norme de chacune des forces de frottements et précise la seule qui paraît suffisante pour permettre à l'athlète de s'arrêter sur une distance raisonnable.
 3. Pour celle-ci détermine la distance d'arrêt minimale de l'athlète en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Handwriting practice lines consisting of 30 horizontal dashed lines.

